

Touwtrekken met de zwaartekracht

In de mechanica wordt gesteld dat alle voorwerpen in vrije val in het zwaartekrachtsveld van de aarde vallen met dezelfde versnelling g [m/s²]. Toch valt een bungeejumper met een versnelling groter dan g . We hebben dit fenomeen in deze studie nader onderzocht.

Uit voorgaande onderzoeken naar het valgedrag van een bungeejumper blijkt dat enkele aspecten niet in ogenschouw zijn genomen: er wordt gebruik gemaakt van een verkeerd materiaalmodel voor rubber, de luchtweerstand is steeds verwaarloosd en experimenten met elastiek zijn vooralsnog nooit uitgevoerd. We laten zien dat het voorspellen van het valgedrag van een bungeejumper aan een rubber koord complexer is dan werd gesteld in eerder onderzoek. L. Hofkamp,

H.A.D. den Dekker, P.R. Wegener en P.Th.L.M. van Woerkom



l.hofkamp@student.tudelft.nl
h.a.d.denekker@student.tudelft.nl
p.r.wegener@student.tudelft.nl
p.t.l.m.vanwoerkom@tudelft.nl

Diederik den Dekker (I) (1984), Liselot Hofkamp (1982) en Philip Wegener (1984) hebben met dit onderzoek hun studie Bachelor Werktuigbouwkunde afgerond aan de Faculteit Werktuigbouwkunde, Maritieme Techniek en Technische Materiaalwetenschappen (3mE) van de TU Delft. Voor het onderzoek ontvingen zij de eerste prijs, uit een groep van zo'n 25 andere onderzoeksteams. De begeleider en mede-auteur Paul van Woerkom (1943) is docent Engineering Dynamics aan dezelfde Faculteit 3mE. De achtergrond van het project was interesse in bio-dynamische belastingen op bungeejumpers uit sterk uiteenlopende gewichtsklassen ('zware jongens' versus 'jeugdige springers').

Eén van de grondslagen van de mechanica impliceert dat op aarde alle lichamen in vacuüm met dezelfde versnelling vallen. Deze valversnelling bedraagt op aarde $g = 9,8$ m/s².

Kagan en Kott [1] hebben het valgedrag van een bungeejumper geanalyseerd op basis van de energievergelijking (de som van potentiële en kinetische energie is constant). Het koord is als niet-elastisch beschouwd (metalen ketting) en de luchtweerstand werd verwaarloosd. Conclusie: de valversnelling (a) is altijd groter dan die van de vrije val (g) en neemt toe met toenemende verhouding van koordmassa m tot springeremassa M .

Omdat bungeekoorden elastisch zijn heeft Delicaat [2] de theorie van Kagan en Kott uitgebreid voor elastische koorden. Met behulp van de wet van Hooke voor het elastische gedrag van het koord heeft Delicaat geconclu-

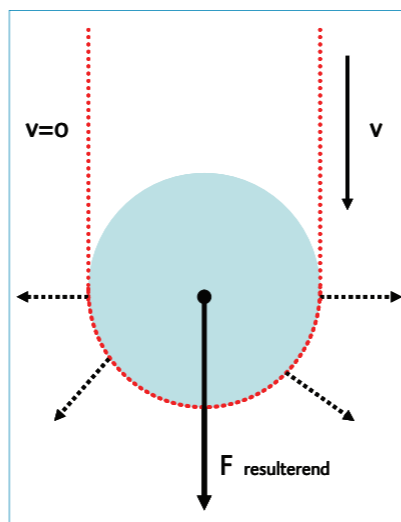
deerd dat de valversnelling a weliswaar groter blijft dan g , maar minder groot wordt dan voor het geval van een niet-elastisch koord.

In het huidige onderzoek wordt de juistheid van de analyse van Kagan en Kott [1] en van de uitspraak van Delicaat [2] nader onderzocht.

THEORIE

Het koord heeft een massa m en een onvervormde lengte L . Aan de linkerzijde is het koord aan een vast punt bevestigd. Aan het vrije uiteinde aan de rechterzijde is een starre massa M (de jumper) bevestigd. Op het begintijdstip bevinden ophangpunt en jumper zich op dezelfde hoogte.

Beschouwd wordt de val tot het tijdstip waarop het koord geheel gestrekt is ($y=L$). Tijdens de val kan het onderste deel van het hangende koord worden gevisualiseerd als een virtueel en mas-



Figuur 1 Virtueel katrol.

saloos katrol waarover het koord zich afwikkelt met snelheid v (figuur 1). Door de massa van het koord ondervindt de katrol centrifugale krachten

naar buiten toe gericht met een resultante verticaal naar beneden. Deze resultante veroorzaakt een krachttoename in het koord en daardoor een toename van de valversnelling. Door differentiatie van de energievergelijking van Kagan en Kott [1], maar ook als alternatief door het opstellen van de bewegingsvergelijking van het rechterkoord, vindt men voor de effectieve valversnelling:

$$a = g \left[1 + \frac{\mu z(4 + 2\mu - \mu z)}{2(2 + \mu - \mu z)^2} \right], \mu \triangleq m/M, z \triangleq y/L \quad (1)$$

Zodra het koord gestrekt raakt ($y = L$) wordt dit:

$$a = g \left[1 + \frac{\mu(4 + \mu)}{8} \right] \Rightarrow a > g \quad (2)$$

Hieruit is af te leiden dat de valversnelling groter is dan g als de massa van het koord m groter is dan nul. De juistheid van deze theorie voor een niet-elastisch koord is experimenteel geheel bevestigd [1].

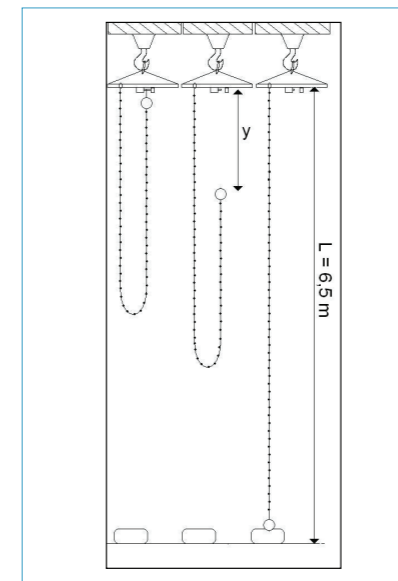
Vervolgens wordt de formule gecorrigeerd voor de invloed van elasticiteit in het koord [2]. Het resultaat is:

$$a = g \left[1 + \frac{\mu(4 + \mu)}{8} \cdot \left(1 - \frac{mg}{2A_0E} \right) \right] \quad (3)$$

met A_0 = oppervlak van de dwarsdoorsnede van het onvervormde koord en E = elasticiteitsmodulus. De juistheid van vergelijking (3) is door de auteur [2] echter niet getest. Hier begint ons eigen experimentele onderzoek.

EXPERIMENT

Voor de experimenten is het koord opgehangen aan een brug op 6,5 m hoogte. In statische toestand raken de hangende koorden net de grond. De jumper is gevormd door een draadloze, gekalibreerde drie-assige versnellingsmeter die is ingebed in een bol van piepschuim (om de val te breken, figuur 3). Het loslaatmechanisme is een elektromagnetische pin. De val



Figuur 2 De meetopstelling.



Figuur 3 De g-meter.

wordt gebroken door een kussen (figuur 2). De telemetrie van de val wordt in Excel ingelezen en de resultante versnelling (in verticale richting) wordt geplotted tegen de tijd.

We meten de valversnelling voor drie koordtypen: twee kettingen, een touw, en twee rubberen elastieken (de laatste twee met visloodjes om het koord zwaarder te maken en zo een groter effect te krijgen van de extra valversnelling, die toeneemt met het gewicht van het koord). Ook hebben we de elasticiteit van de rubberen elastieken gemeten en de versnellingen van jumper in vrije val (geen koord), in val met ketting (twee typen), in val met touw en in val met rubber (twee typen).

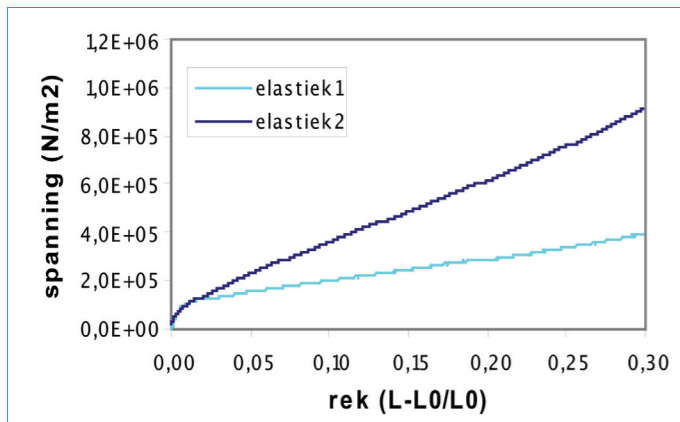
RESULTATEN

De elasticiteit van de rubber koorden is getest in een Zwicktrekbank. In figuur 4 worden representatieve resultaten voor de relatie tussen rek $\lambda = (L - L_0) / L_0$ (met L_0 de oorspronkelijke lengte van het koord) en spanning σ getoond. In de val experimenten loopt de rek op tot $\sim 0,1$.

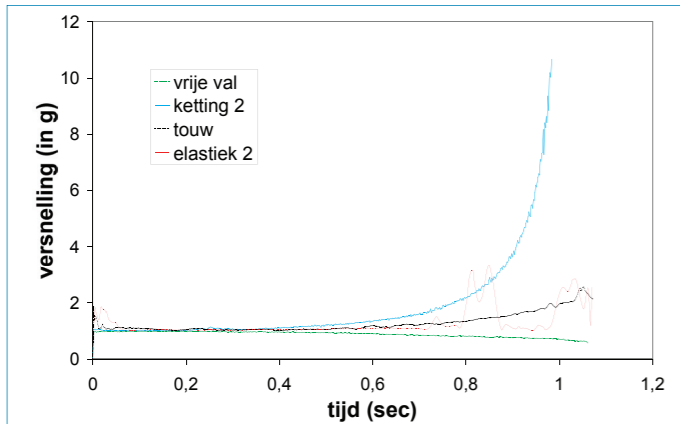
Figuur 5 toont gemiddelde resultaten van de vier testseries: vrije val, ketting, touw en elastisch rubber. In iedere testserie is het experiment vijf maal herhaald. Bij de vrije val, de ketting en het touw lijken de vijf testresultaten sterk op elkaar. Bij het rubber is dit tot $\sim 0,7$ s ook het geval maar daarna geven de vijf verschillende metingen steeds een ander grillig patroon. Een ervan is in de grafiek getoond. De experimenten met elastiek 1 en ketting 1 bleken niet valide vanwege respectievelijk een te lage E-modulus en niet-symmetrische schakels. Deze resultaten zijn niet getoond.

DISCUSSIE EN CONCLUSIES

In literatuur is geen verwijzing naar luchtweerstand gevonden. Bij ons experiment, met een valhoogte van 6,5 meter en grote jumperdiameter, is de luchtweerstand van de jumper significant. In de vrije val leidt deze tot een reductie van ongeveer 40% van de valversnelling (figuur 5). Hieruit vindt men voor de weerstandscoefficiënt van de (ruwe) bol de waarde $C_D = 0,5$.



Figuur 4 Spanning-reekurve elastiek.



Figuur 5 Meetdata.

De ketting en het touw geven resultaten die consistent zijn met de theorie. Bij het rubber koord worden discrepanties waargenomen. Vergelijking (3) heeft een correctieterm gebaseerd op de geldigheid van de lineaire materiaalwet van Hooke [2]. Maar figuur 4 laat zien dat het gedrag in feite sterk niet-lineair is voor rekken tot ongeveer 0,1. De conclusie is dat het rubber zich gedraagt als hyperelastisch materiaal, volgens de relatie van Mooney-Rivlin [3]:

$$\sigma = 2A_0\{C_1 + (C_2/\lambda)\}\{\lambda - (1/\lambda^2)\}, \lambda \triangleq (L - L_0)/L_0 \quad (4)$$

met $C_1 = 1,4$ MPa en $C_2 = 2,9$ MPa. De voorgestelde reductiefactor in vergelijking (3) is dus onjuist. Viscositeitseffecten in het rubber in de vrije val worden verwaarloosbaar geacht.

Door de aanwezige spankracht in het nog in rust hangende elastiek krijgt de bol een extra versnelling (ruk) bij het loskomen (figuur 5). Dit gebeurt door de elasticiteit ook in het touw, maar de piek – kort na het loskomen – is uiteraard vooral zichtbaar bij het rubber koord, omdat deze aanvallig door haar eigen gewicht het meest is uitgerekt. Door de ruk en de toenemende spanning ontstaan longitudinale trillingen in het rubber koord; deze zijn direct herkenbaar in figuur 5 na ongeveer 0,7 s. Door de aanwe-

zigheid van longitudinale elastische trillingen wordt het realisme van de beschouwde theorie [2] verder ondergraven.

Samenvattend: het verband tussen de elastische trillingen en waargenomen valversnelling is te complex voor een exacte beschrijving. De invloed van de massaverhouding tussen koord en jumper is wel duidelijk te zien: de jumper aan de zware ketting ondergaat een veel grotere versnelling (tot wel 10g!) dan die aan het touw (tot 'slechts' 2g).

Duidelijk is dat het voorspellen van het valgedrag van een bungeejumper aan een rubber koord complexer is dan werd gesteld in eerder onderzoek.

Het optreden van de ruk kort na $t = 0$ en de invloed daarvan op trillingen in het (elastische) koord verdient nadere aandacht.

REFERENTIES

- 1 D. Kagan and A. Kott, *The greater-than-g acceleration of a bungee jumper*, *The Physics Teacher*, Vol. 34, sept. 1996, p. 368 – 373.
- 2 C. Delicaat: Commentaar op artikel in *Nederlands Tijdschrift voor de Natuurkunde* okt. 2003 getiteld: *De valversnelling bij bungeejumping*. http://www.phys.uu.nl/~nnv/ntvn/Bungee-artikelen/NTvN_Bungee_5.pdf
- 3 Macosko, C.W.: *Rheology - Principles, measurements and applications*. VCH, Minneapolis, 1994.

Hoe werd je natuurkundige?

Op de middelbare school (Vossius Gymnasium, 1952-1958) bleek dat ik goed in wiskunde en natuurkunde was, moeilijke formules schrikten mij niet af, integendeel. Ik was vooral gefascineerd door het feit dat je dingen over de wereld en het heelal kunt 'uitrekenen'.

Het lag dus in mijn lijn om wis- en natuurkunde te gaan studeren en in 1966 studeerde ik af in de theoretische natuurkunde aan de Universiteit van Amsterdam. Daarna kreeg ik via de stichting FOM een promotieplaats. Mijn promotor werd Sieg Wouthuysen, die een vergelijking had gevonden om massalozе neutrino's te beschrijven. Deze vergelijking week af van de gebruikelijke Diracvergelijking door toevoeging van een asymmetrische term. Hierdoor zou de linkshandigheid van neutrino's vanzelf tevoorschijn moeten komen.

Quantisatie van het met Wouthuysen vergelijking corresponderende veld was alleen mogelijk in een ruimte waarin zowel vectoren voorkwamen met een positieve lengte, alsook vectoren met een negatieve lengte. De interpretatie van de resultaten wordt dan problematisch, want een negatieve waarschijnlijkheid bestaat niet. Mijn opdracht was niettemin een waarschijnlijkheidsinterpretatie aan het resultaat te geven. In 1972 ben ik hierop gepromoveerd.

In 1998 is experimenteel vastgesteld dat het neutrino massa heeft en dus moeten er ook rechtshandige neutrino's bestaan. Sieg Wouthuysen heeft dit niet meer hoeven meemaken, hij is in 1996 overleden.

Wat gebeurde er na je promotie?

Na mijn promotie wilde ik het liefst verder gaan als onderzoeker aan een universiteit, maar ik kon geen plaats vinden. Misschien stond het onderwerp van mijn promotieonderzoek buiten de belangstelling van de overige fysici, misschien vond men mij een te matig onderzoeker, vermoedelijk beide.

Omdat het vinden van een baan als fysicus niet lukte en omdat ik toch theore-

De tandarts

Eljah Mendels studeerde natuurkunde en promoveerde in de theoretische natuurkunde aan de Universiteit van Amsterdam. Daarna werd hij tandarts, maar is in zijn vrije tijd nog altijd bezig met natuurkunde.



tische fysica wilde blijven doen, kwam ik tot de conclusie dat ik zelfstandig moest worden. Ik besloot tandheelkunde te gaan studeren. In 1973 begon de studie en in 1980 slaagde ik voor het tandartsexamen. Sindsdien ben ik als tandarts gevestigd in Den Haag. Tandheelkunde was een tweede keus, en dan nog wel bij gebrek aan beter, maar ik ben niet ongelukkig geworden. Ik werk met veel plezier in mijn solopraktijk aan huis. Mijn vrouw assisteert in moeilijke gevallen.

Wat is fascinerend aan je huidige werk?

Ik heb een algemene praktijk, waarbij alle 'gewone' dingen gedaan worden: vullingen, kronen, bruggen, kunstgebitten. Moeilijkere dingen, zoals implantaten en tandvleesbehandelingen stuur ik door naar collegae. Mijn hobby is de 'endo' (zenuwbehandeling oftewel wortelkanaalbehandeling). Het leuke hierbij is dat de behandeling slaagt als je het precies volgens het boekje doet. Bij een grote kies neemt dit soms wel twee uur in beslag.

Ben je nog als natuurkundige bezig gebleven?

Intussen ben ik 'mondjesmaat' natuurkunde blijven doen. Ik had ingezien dat een speculatief onderwerp risikant is en besloot voortaan met beide benen op de grond te blijven. Ik ging terug naar de normale relativistische quantumveldentheorie en probeerde een aantal Feynmandiagrammen te berekenen. Daarbij stuitte ik op een moeilijkheid bij diagrammen met overlappende loops. Ik begon langza-

merhand te begrijpen dat de moeilijkheid werd veroorzaakt door integratie over de door Schwinger ingevoerde Feynmanparameters. Omdat hierbij allerlei verschillende soorten divergenties met elkaar gemengd worden, besloot ik dat deze parameters moesten worden afgeschaft. Ik bedacht een alternatief om Feynmandiagrammen te berekenen en schreef als vijfdejaars student tandheelkunde een artikel met de titel *Feynman diagrams without Feynman parameters* [1].

Ik werkte de methode verder uit, deed berekeningen als een patiënt zijn afspraak had afgezegd of was vergeten te komen of tussen twee patiënten door. Na 24 jaar had ik een vervolg gevonden [2]. Drie jaar later heb ik een derde artikel over hetzelfde onderwerp gepubliceerd [3].

Ik heb wel eens mijn afsprakenboek voor een dag 'leeg geveegd', de afgesproken patiënten werden dan naar een andere dag verplaatst, om een collega fysicus te raadplegen, maar kreeg steeds als antwoord "wat wil je eigenlijk, alles is al bekend". Ik dacht dan "wacht maar totdat moeilijkere diagrammen moeten worden berekend". Natuurlijk kunnen mijn collegae in principe ook alles uitrekenen. Het probleem hierbij is dat de meeste resultaten oneindig zijn. Om een zinnige uitkomst te krijgen moet je renormaliseren. De verschillende soorten oneindigheden moeten dan uit elkaar worden gepeuterd en vervolgens worden ze een voor een weggeredeneerd. Dankzij krachtige computerprogramma's, die ook wiskundige bewerkingen

kunnen uitvoeren, is dat tot nu toe gelukt op de gebruikelijke manier, maar ik heb al een artikel van 137 bladzijden gezien, de daarbij toegepaste computerprogramma's niet meegeteld. Bij mijn methode om een Feynmandiagram te berekenen verschijnen alle oneindigheden netjes gescheiden van elkaar als eerste termen van een reeks. De overige termen van de reeks geven meteen het gewenste eindige resultaat.

Per 1 september ga ik met pensioen als tandarts, niet als fysicus. Er worden steeds grotere deeltjesversnellers gebouwd, waarbij inderdaad processen plaats vinden die moeten worden beschreven door steeds gecompliceerdere diagrammen. Ik werk geïsoleerd van collegae fysici en wacht op een telefoontje van een van hen met de boodschap "we komen er op onze manier niet meer uit, kom alsjeblieft helpen om met jouw methode Feynmandiagrammen te berekenen".

Ben je lid van de NNV, en waarom niet?

Vroeger wel, nu ben ik lid van de NMT (Nederlandse Maatschappij tot bevordering der Tandheelkunde), stuur maar een proefnummer van dit blad. Misschien dat ik dan de NMT weer inruil voor de NNV.



REFERENTIES:

- 1 E. Mendels, *Nuovo Cimento Soc. Ital. Fis.*, A 45, 87 (1978)
- 2 E. Mendels, *J. Math. Phys.* 43, 3011 (2002)
- 3 E. Mendels, *J. Math. Phys.* 46, 072380 (2005)