

# Touwtrekken met de zwaartekracht

Liselot Hofkamp (wb1146653), Diederik den Dekker (wb1131737) en Philip Wegener (wb1175785)

## Samenvatting

In de mechanica wordt gesteld dat alle voorwerpen in vrije val in het zwaartekrachtsveld van de aarde vallen met dezelfde versnelling  $g$  [ $m/s^2$ ]. Toch wordt gemeld dat een bungee jumper valt met een versnelling groter dan  $g$ . In de huidige studie wordt dit fenomeen nader onderzocht.

Uit voorgaande onderzoeken naar het valgedrag van een bungee jumper blijkt dat enkele aspecten niet in ogenschouw zijn genomen: Er wordt gebruik gemaakt van een verkeerd materiaalmodel voor rubber, de luchtweerstand is altijd verwaarloosd en experimenten met elastiek zijn vooralsnog nooit uitgevoerd. Opvallend is dat het voorspellen van het valgedrag van een bungee jumper aan een rubber koord complexer is dan werd gesteld in eerder onderzoek.

## 1. Inleiding

Eén van de grondslagen van de mechanica impliceert dat op aarde alle lichamen in vacuüm met dezelfde versnelling vallen. Deze valversnelling bedraagt op aarde  $g = 9.8 \text{ m/s}^2$ .

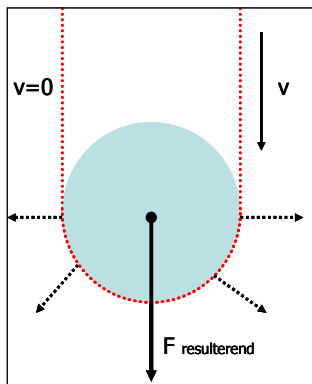
Kagan en Kott [1] hebben het valgedrag van een bungee jumper geanalyseerd op basis van de energievergelijking (de som van potentiële en kinetische energie is constant). Het koord is als niet-elastisch beschouwd (metalen ketting) en de luchtweerstand is verwaarloosd. Conclusie: de valversnelling ( $a$ ) is altijd groter dan die van de vrije val ( $g$ ) en neemt toe met toenemende verhouding van koordmassa tot springermassa.

Omdat bungee koorden elastisch zijn heeft Delicaat [2] de theorie van Kagan en Kott uitgebreid voor elastische koorden. Met behulp van de wet van Hooke voor het elastische gedrag van het koord heeft Delicaat geconcludeerd dat de valversnelling a weliswaar groter blijft dan  $g$ , maar minder groot wordt dan voor het geval van een niet-elastisch koord.

In het huidige onderzoek wordt de juistheid van de analyse van Kagan en Kott [1] en van de uitspraak van Delicaat [2] nader onderzocht.

## 2. Theorie

Het koord heeft een massa  $m$  en een onvervormde lengte  $L$ . Aan de linkerzijde is het koord aan een vast punt bevestigd. Aan het vrije uiteinde aan de rechterzijde is een starre massa  $M$  (de jumper) bevestigd. Op het begintijdstip bevinden ophangpunt en jumper zich op dezelfde hoogte.



Figuur 1: Virtueel katrol

Beschouwd wordt de val tot het tijdstip waarop het koord geheel gestrekt is ( $Y=L$ ). Tijdens de val kan het onderste deel van het hangende koord worden gevisualiseerd als een virtueel en massaloos katrol waarover het koord zich afwikkelt met snelheid  $v$  (fig.1).

Door de massa van het koord ondervindt de katrol centrifugale krachten naar buiten toe gericht met een resultante verticaal naar beneden. Deze resultante veroorzaakt een krachttoename in het koord en daardoor een toename van de valversnelling. Door differentiatie van de energievergelijking van Kagan en Kott [1], maar ook als alternatief door het opstellen van de bewegingsvergelijking van het rechterkoord, vindt men voor de effectieve valversnelling:

$$a = g \left[ 1 + \frac{\mu z(4 + 2\mu - \mu z)}{2(2 + \mu - \mu z)^2} \right], \mu \triangleq m/M, z \triangleq y/L \quad (1)$$

Zodra het koord gestrekt raakt ( $y = L$ ) wordt dit

$$a = g \left[ 1 + \frac{\mu(4 + \mu)}{8} \right] \Rightarrow a > g \quad (2)$$

De juistheid van deze theorie voor een niet-elastisch koord is experimenteel geheel bevestigd [1].

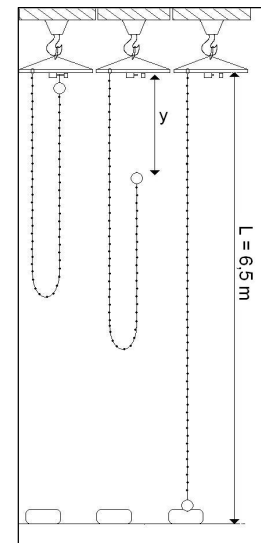
Vervolgens wordt de formule gecorrigeerd voor de invloed van elasticiteit in het koord [2]. Het resultaat is:

$$a = g \left[ 1 + \frac{\mu(4 + \mu)}{8} \cdot \left( 1 - \frac{mg}{2A_0 E} \right) \right] \quad (3)$$

met  $A_0$  = oppervlak van de dwarsdoorsnede van het onvervormde koord en  $E$  = elasticiteitsmodulus. De juistheid van vergelijking (3) is door de auteur [2] echter niet getest. Hier begint ons eigen experimentele onderzoek.

## 3. Experiment

Voor de experimenten is het koord opgehangen aan een brug op 6,5 m hoogte. In statische toestand raken de hangende koorden net de grond. De jumper is gevormd door een draadloze, gekalibreerde drie-assige versnellingsmeter die is ingebed in een bol van piepschuim (om de val te breken, figuur 3). Het loslaatmechanisme is een elektromagnetische pin. De val wordt gebroken door

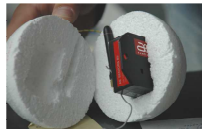


Figuur 2: Meetopstelling

een kussen (figuur 2). De telemetrie van de val wordt in Excel ingelezen en de resultante versnelling (in verticale richting) wordt geplot tegen de tijd.

Het testprogramma betreft:

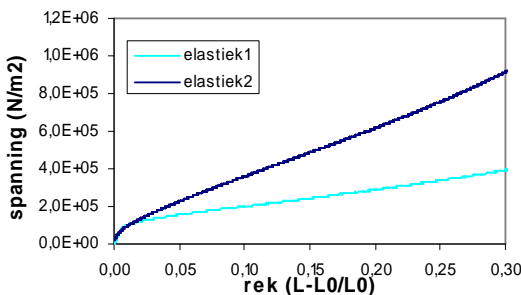
- de koordtypen en massaverhoudingen van ketting, touw en rubber (de laatste twee met visloodjes voor gelijke massadichtheid);
- elasticiteitseigenschappen van het materiaal;
- versnellingen van jumper in vrije val (geen koord), in val met ketting (twee typen), in val met touw; in val met rubber (twee typen).



Figuur 3: g-meter

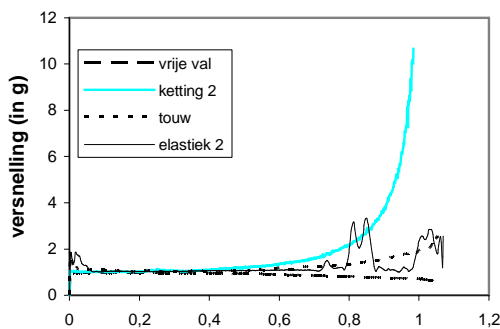
#### 4. Resultaten

Rubber koord is getest in de Zwick trekbank. In figuur 4 worden representatieve resultaten voor de relatie tussen rek en spanning getoond. In de valexperimenten loopt de rek op tot ~ 0,1.



Figuur 4: Spanning – rek curve elastiek

Figuur 5 toont gemiddelde resultaten van de vier testseries: vrije val, ketting, touw en elastisch rubber. In iedere testserie is het experiment vijf maal herhaald. Bij de vrije val, de ketting en het touw lijken de vijf testresultaten sterk op elkaar. Bij het rubber is dit tot ~ 0,7 s ook het geval maar daarna geven de vijf verschillende metingen steeds een ander grillig patroon. De experimenten met elastiek 1 en ketting 1 bleken niet valide vanwege respectievelijk een te lage E-modulus en niet-symmetrische schakels. Deze resultaten zijn dus niet getoond.



Figuur 5: Meetdata

#### 5. Discussie en conclusies

In literatuur is geen verwijzing naar luchtweerstand gevonden. Bij ons experiment, met een valhoogte van

6,5 meter en grote jumperdiameter, is de luchtweerstand van de jumper significant. In de vrije val leidt deze tot een reductie van ongeveer 40% van de valversnelling (figuur 5). Hieruit vindt men voor de weerstandscoefficiënt van de (ruwe) bol de waarde  $C_D \approx 0,5$ .

De ketting en het touw geven resultaten welke consistent zijn met de theorie. Bij het rubber koord worden discrepanties waargenomen. Vergelijking (3) heeft een correctieterm gebaseerd op de geldigheid van de lineaire materiaalwet van Hooke [2]. Maar figuur 4 laat zien dat het gedrag in feite sterk niet-lineair is voor rekken tot ongeveer 0,1. De conclusie is dat het rubber zich gedraagt als hyperelastisch materiaal, volgens de relatie van Mooney-Rivlin [3]:

$$\sigma = 2A_0 \{C_1 + (C_2/\lambda)\} \{\lambda - (1/\lambda^2)\}, \lambda \triangleq (L-L_0)/L_0 \quad (4)$$

met  $C_1 = 1,4$  MPa en  $C_2 = 2,9$  MPa. De voorgestelde reductiefactor in vergelijking (3) is dus onjuist.

Viscositeitseffecten in het rubber in de vrije val worden verwaarloosbaar geacht; voorts is er geen relevante literatuur voor dit project.

Door de aanwezige spankracht in het nog in rust hangende elastiek krijgt de bol een extra versnelling (ruk) bij het loskomen (figuur 5). Dit gebeurt door de elasticiteit ook in het touw, maar de piek - kort na het loskomen - is uiteraard vooral zichtbaar bij het rubber koord, omdat deze aanvankelijk door haar eigen gewicht het meest is uitgerekt. Door de ruk en de toenemende spanning ontstaan longitudinale trillingen in het rubber koord; deze zijn direct herkenbaar in figuur 5 na ~ 0,7 s. Door de aanwezigheid van longitudinale elastische trillingen wordt het realisme van de beschouwde theorie [2] verder ondergraven.

Meer algemeen gesteld: het verband tussen de elastische trillingen en waargenomen valversnelling is te complex voor directe uitspraken. De invloed van de massaverhouding tussen koord en jumper is wel duidelijk te zien: de jumper aan de zware ketting ondergaat een veel grotere versnelling (tot wel 10 g !) dan die aan het touw (tot "slechts" 2 g).

Duidelijk is dat het voorspellen van het valgedrag van een bungee jumper aan een rubber koord complexer is dan werd gesteld in eerder onderzoek.

Het optreden van de ruk kort na  $t = 0$  en de invloed daarvan op trillingen in het (elastische) koord verdient nadere aandacht.

#### Referenties

- [1] D. Kagan and A. Kott: "The greater-than-g-acceleration of a bungee jumper". The Physics Teacher, Vol. 34, sept. 1996, p. 368 – 373.
- [2] C. Delicaat: Commentaar op artikel in Nederlands tijdschrift voor de Natuurkunde okt. 2003 getiteld: "De valversnelling bij bungee-jumping".
- [3] Macosko, C.W.: Rheology - Principles, measurements and applications. VCH, Minneapolis, 1994

